補論　Gandhi-Przeworski Model

本稿はJennifer Gandhi and Adam Prezeworski (2006) “Cooperation, Cooptation, and Rebellion under Dictatorships,” *Economics and Politics* Vol.18(1),pp.1-26. のフォーマル（数理）モデル部分の邦訳である.

1　前提

政策はある数 $x \in [0,1]$ をとる. 問題となる政策は公立学校における宗教教育に関わるものであったり, 検閲に関するものであったり, ないしは経済的なもの，すなわち最低賃金や公定歩合に関してなど, 何でもよい．x^i は個人 i の準凸型選好の頂点を表す．選好の頂点は大衆を集計した関数 $f(x^i)$ にしたがって分布する．独裁者の理想点 x^D は中位理想点 x^M よりも大きい．すなわち独裁者は自由で競争的な選挙によって決まるものとは異なる選好を持っていることが，一般に独裁制の真理であり，簡便かつ一般性を失わないように $x^D > x^M$ を前提とする．さて，反独裁勢力の連合が勝利するや否や解体することがあり，民主制にとって代わることもあれば，新たな独裁制が打ち立てられることもあるが，現行の独裁者と戦うためにはいかなる反対勢力であっても自らを「統一された人民」の代表とせねばなるまい．ここで独裁者に抵抗する者は誰であれ中位選好を持つ個人に訴えかけねばならず，われわれは潜在的野党を $x^O = x^M \equiv F^{-1}(1/2)$ と表すことにする．

独裁者に反対する人々の集合は $\Omega = \{x^i \mid x^i \leq x^O + \frac{1}{2}(x^D - x^O)\}$ である．政策の分極化の程度を $\theta \equiv x^D - x^O$ という距離で表し，この集合は $F(x^D - \frac{1}{2}\theta) > \frac{1}{2}$ で表せる. われわれは政策的妥協を次のように定義する

$$\gamma \equiv \frac{x^D - x^*}{x^D - x^O} = (x^D - x^*)/\theta. \tag{1}$$

x^* は独裁者によって選択された現実の政策である．独裁者が政策的妥協 $\gamma > 0$ を行った時，野党勢力は $F[x^D - \frac{1}{2}\theta(1+\gamma)]$ に減少する. ここで $F(\gamma\theta/2)$ 分の勢力が独裁者に協力する.

金銭授受，臨時収入，特権といったレントは独裁者と潜在的野党の一部の間の協力によって生み出される. 協力は独裁者が政策的妥協を行った際に生じるので, 全てのレント R は政策的妥協の増加関数である. すなわち $dR/d\gamma > 0$ である. しかしながら独裁制には協力を必要とする程度 α によって違いがある. 鉱物資源に依

存できる独裁者はレントを確保する上で協力の必要性が薄い ($\alpha \approx 0$). そうではない独裁者はさまざまなレベルの協力を必要とする. ここでレントは以下の数式にしたがって生み出されるものとしよう

$$R(\gamma) = \gamma^{\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{2}$$

独裁者 (D) と野党勢力 (O) はともに線形の分割可能な効用関数を持ち，それは

$$U^j(R^j, x) = v(R^j) + u^j(x), \quad j \in \{D, O\}, \tag{3}$$

で表される. このとき R^j は j に帰着するレントの総量である.

関数 $u(x)$ は次の形で与えられる

$$u^j \equiv u(x^j, x) = -(x^j - x)^2. \tag{4}$$

レントは全体の s 分を野党に，$(1-s)$ 分を独裁者が保持するように分割される．この関数 $v = (\cdot)$ は単純に $v(R) = R$ である.

(1) から (4) までを用いて，われわれは独裁者の効用関数は次のように書き直すことができる

$$U^D = (1-s)\gamma^{\alpha} - (x^D - x^*)^2 = (1-s)\gamma^{\alpha} - (\gamma\theta)^2. \tag{5}$$

政策的妥協について独裁者の効用の導関数を求めると

$$\frac{\partial U^D}{\partial \gamma} = (1-s)\alpha\gamma^{\alpha-1} - 2\theta^2\gamma, \tag{6}$$

となり，これは γ が小さい場合は正となり，大きい場合は負となる．よって独裁者は協力を引き出せる時だけ，政策的妥協をするインセンティブを持っているかもしれない.

上と同様に，われわれは次のように野党勢力の効用関数を書き直すことができ

$$U^O = s\gamma^{\alpha} - (x - x^O)^2 = s\gamma^{\alpha} - \theta^2(1-\gamma)^2, \tag{7}$$

この関数は政策的妥協に応じて増加する．よって

$$\frac{\partial U^O}{\partial \gamma} = s\alpha\gamma^{\alpha-1} + 2\theta^2(1-\gamma) > 0. \tag{8}$$

ゆえに野党は常に妥協を望んでいる.

協力の必要性 α，政策的分極化 θ，そして後に定義する野党勢力の強さ z が与えられ，これらは観察可能であるとする．独裁者は政策的妥協とレントの取り分を提示 $\{\gamma, s\}$ する．次に野党は反抗するか否かを決定する．もし反抗しないのであれば，政策とレントは独裁者のオファーに従って配分される．もし野党勢力が闘うことを決めれば，自然へと移動して紛争を解決する.

野党勢力の強さ，すなわち z を特徴付けるため，もし行動を起こせば独裁者を倒す確率を $q<1$ と定めよう．もし野党勢力が勝利すれば，すべてのレントを手に入れて理想的な政策を遂行できる．もし野党勢力が敗れれば，独裁者は自らの効用を最大化する政策を実行し，野党に制裁を加える．制裁の過酷さを $L\leq 0$ で表す．q と L は決定がなされた環境において定まることを想起しよう．よってこれらは外生変数である．以上の前提を踏まえ，独裁者に抵抗した場合の期待値は

$$q[V(R^O=1)+u^O(\gamma=1)]+(1-q)L=q+(1-q)L\equiv z \tag{9}$$

となる．ここで $z(q,L)$ は野党の強さを要約している．野党は独裁者を倒す好機を持つ時，および独裁者との闘争に敗れても損失が小さい時に強いといえる．

2　均衡

独裁者の問題は次の制約条件つきの効用最大化

$$\max_{\gamma,s} U^D(R^D,x) \tag{10}$$

s.t.

$$U^O\geq z,\quad 0\leq s\leq 1,\quad 0\leq\gamma\leq 1,$$

をラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= (1-s)\gamma^\alpha-\gamma^2\theta^2+\lambda[s\gamma^\alpha-\theta^2(1-\gamma)^2-z] \\ &+\mu_0 s+\mu_1(1-s)+\eta_0\gamma+\eta_1(1-\gamma),\end{aligned} \tag{11}$$

で解く．このとき λ は野党勢力のインセンティブの制約条件にかかるラグランジュ乗数であり，μ および η も s と γ に関する制約のための乗数である．

場合分けが増殖するのを避けるため，相補性条件に焦点を当て

$$\lambda[s\gamma^\alpha-\theta^2(1-\gamma)^2-z]=0 \tag{12}$$

端点解を考察する．

まず $\lambda=0,\, s\gamma^\alpha-\theta^2(1-\gamma)^2-z>0$ の場合を考察しよう．独裁者は野党勢力を恐れる必要がなく，協力を受けて効用関数を最大化することが彼の行う全てである．このとき一階条件は

$$\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial s}\right|_{\lambda=0}=-\gamma^\alpha+\mu_0\leq 0 \tag{13}$$

および

$$\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\gamma}\right|_{\lambda=0}=\alpha\gamma^{\alpha-1}-2\gamma\theta^2=0, \tag{14}$$

であって，独裁者が $s_c = 0$ および

$$\gamma_c = \left(\frac{\alpha}{2\theta^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}, \tag{15}$$

を提示したことを意味する．この添え字 c は「純粋協力」の提案をさす．

この提案は次の状況下では野党勢力に受け入れられる．すなわち

$$z < -\theta^2(1-\gamma)^{2,} \tag{16}$$

であり，これは「純粋協力均衡」つまり独裁者が $\{\gamma_c, 0\}$ を提示し，野党勢力が反抗しない均衡の条件を定義している．

では $\lambda > 0, 0 < s < 1, 0 < \gamma < 1$ の場合を考察しよう．一階の条件は

$$\left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial s}\right|_{\lambda>0} = -\gamma^\alpha + \lambda\gamma^\alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \tag{17}$$

および

$$\left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \gamma}\right|_{\lambda>0} = \alpha\gamma^{\alpha-1} - 4\gamma\theta^2 + 2\theta^2 = 0, \tag{18}$$

であり陰伏解 γ_z を有する．この添え字 z は「コオプテーション (取り込み)」を意味する．独裁者が反抗を恐れるなら少なくとも，協力によって得たレントを最大化するうえで必要な限りの政策的譲歩をするだろう（すなわち $\gamma_z \geq \gamma_c$）．このことは (18) 式を書き直した $\alpha\gamma_z^{\alpha-1} - 2\gamma_z\theta^2 = 2\theta^2(\gamma_z - 1) \leq 0$ より確認できる．これと (14) 式を比較すると γ が同値だと式を満たしえないことがわかる．言い換えると γ について左辺を減少させると，$\gamma_z \geq \gamma_c$ が真でなければならない．

最後に $\lambda > 0$ なので，$s\gamma^\alpha - \theta^2(1-\gamma)^2 - z = 0$ でなければならず，ゆえに

$$s_z = \frac{z + \theta^2(1-\gamma_z)^2}{\gamma_z^\alpha} \tag{19}$$

となる．われわれは $\{\gamma_z, s_z\}$ を「コオプテーション提案」と呼ぶことになろう．

$\gamma_c \leq \gamma_z$ であるから，協力を得た独裁者の効用 (U_c^D) はコオプテーションによる効用 (U_z^D) よりも大きいことを憶えておきたい．しかし野党勢力が協力の要請を拒絶するに十分なほど強力ならば，独裁者は野党の抵抗を抑制するに十分な提案を行うだろうか．抵抗に直面した独裁者の期待値は

$$\begin{aligned} &q[V(R^D = 0) + u^D(\gamma = 1)] + (1-q)U_c^D \\ = \quad &-q\theta^2 + (1-q)[\gamma_c^\alpha - \theta^2\gamma_c^2], \end{aligned} \tag{20}$$

であり，独裁者はコオプテーションによる効用が少なくとも抵抗の期待値と同程度に高い限り，コオプテーション提案を行う．すなわち

$$U_z^D \geq -q\theta^2 + (1-q)U_c^D. \tag{21}$$

U_z^D に s_z を代入し，(9) 式から z を消去して移項すると，上の条件を次のように書きなおすことができる

$$q(U_c^D+\theta^2-1+L)\geq U_c^D+\theta^2-[\gamma_z^\alpha+2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z)]+L. \tag{22}$$

$C=U_c^D+\theta^2-[\gamma_z^\alpha+2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z)]$ および $D=U_c^D+\theta^2-1$ とおく．ならばこの条件は $(D+L)\geq C+L$ となる．今やパラメータの任意の値について，$C\leq D$ は真である．よってこのことは次の 3 つのケースを作り出す．すなわち (1) もし $C\leq D<-L$ ならば，$q<1$ である全ての値においてこの条件は満たされる．(2)　もし $C<-L<D$ ならば，$q\geq 0$ である全ての値においてこの条件は満たされる．(3) もし $-L<C\leq D$ ならば，この条件は $q\geq (C+L)/(D+L)$ の場合のみ満たされる．

このゲームには 3 つの均衡が存在する．それぞれの均衡は $\{q,-L\}$ 空間において最も良く特徴付けられる．

2.1　命題

(1) もし

$$-L\geq\frac{\theta^2(1-\gamma_c)^2+q}{1-q}$$

であるならば，協力均衡が生じる．すなわち独裁者は協力を要請し，野党は抵抗しない．

(2) もし

$$U_c^D+\theta^2-\frac{\gamma_z^\alpha+2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z)-q}{1-q}\leq -L<\frac{\theta^2(1-\gamma_c)^2+q}{1-q}$$

ならば，コオプテーション均衡が生じる．すなわち独裁者はコオプテーション提案を行い，野党は抵抗しない．

(3) もし

$$-L<U_c^D+\theta^2-\frac{\gamma_z^\alpha+2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z)-q}{1-q}$$

ならば，動乱均衡が発生する．つまり独裁者は協力を要請するが，野党は抵抗する．

2.2　証明

(1) のパートは q の項を含む L について式 (16) を解くことから得られる．つまり

$$-L<\frac{\theta^2(1-\gamma)^2+q}{1-q}$$

であるとき，独裁者は $q<(C+L)/(D+L)$ の場合にのみコオプテーション提案を行わない．C と D に代入し (3) パートの条件下で L を解く．

最後にわれわれは以下のことを確認しなければならない

$$U_c^D + \theta^2 - \frac{\gamma_z^\alpha + 2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z) - q}{1-q} < \frac{\theta^2(1-\gamma_c)^2 + q}{1-q}$$

もしくは

$$(1-q)(\gamma_c^\alpha - \theta^2\gamma_c^2 + \theta^2) - \gamma_z^\alpha - 2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z) + q < \theta^2(1-\gamma_c)^2 + q.$$

これは $q=0$ において真でなければならない．というのは $\gamma_c^\alpha - \theta^2\gamma_c^2 + \theta^2 - \theta^2(1-\gamma_c)^2 < \gamma_z^\alpha + 2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z)$, あるいは式を整理した $2\theta^2[(\gamma_c-\gamma_z)(1-\gamma_z+\gamma_c)] < \gamma_z^\alpha - \gamma_c^\alpha$ であるからだ．しかし $(\gamma_c-\gamma_z) \leq 0, 1-\gamma_z+\gamma_c \geq 0$ である．

$$U_c^D + \theta^2 - \frac{\gamma_z^\alpha + 2\theta^2\gamma_z(1-\gamma_z) - q}{1-q} < \frac{\theta^2(1-\gamma_c)^2 + q}{1-q}$$

証明終わり．

3 つの均衡はグラフによって示される．

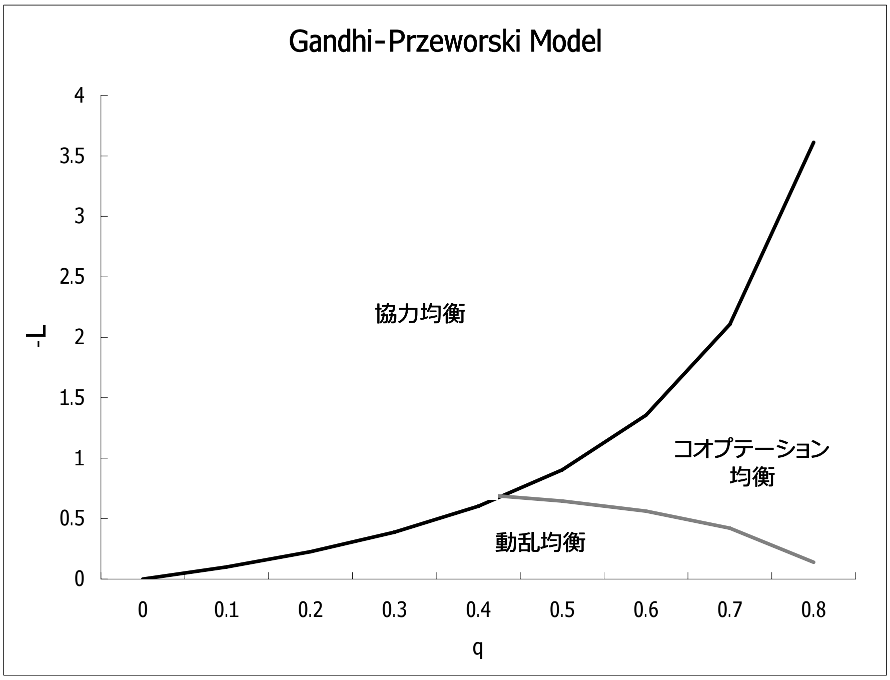

図 1: $\{-L, q\}$ 空間での均衡

出典：Gandhi and Przeworski (2006)

われわれは野党勢力が弱い時，すなわち独裁者が追放される可能性が低く，追放が失敗に終われば受ける損失が大きい場合，独裁者が協力によって手にするレ

ントを最大化する政策を設定し，レントを分割せず，それでいて野党勢力が抵抗しない，ということを学んだ．抵抗が失敗しても独裁者が野党勢力に課す制裁が小さいか，野党勢力が勝利する可能性が高い場合，独裁者は追加的な政策的妥協を行い，レントを分割して与えることで，野党勢力は抵抗しない．しかしながら野党勢力が独裁者を打倒するチャンスが低くても，独裁者が野党勢力に制裁を加えようとしなければ，独裁者は純粋協力の提案以上の動きを示さず，野党勢力は抵抗運動を開始する．独裁者は打倒される見込みがなければ野党勢力を恐れないし，独裁者が制裁できなければ野党勢力は抵抗することを恐れない．追加的な政策的妥協およびレントの分割は独裁者にとってコストになるので，コオプテーション提案をしたいわけではない．そして野党勢力の抵抗が失敗しそうにないならば，動乱へと到る．